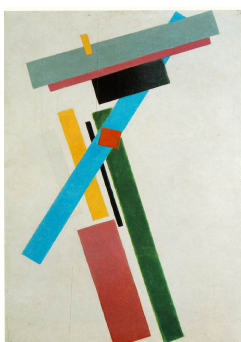


El conjunto de Kakeya

Las tres imágenes siguientes son, respectivamente, de un cuadro suprematista de K. Malevich, de una escultura de L. Frechilla del Rey que adorna una plaza de Madrid, y de un magnífico conjunto multidireccional de estalactitas que se encuentra en la cueva *El soplao*, de Santander. Pero podrían también ser consideradas como plasmaciones artísticas, o presentes en la naturaleza, de un objeto matemático muy interesante: el conjunto de Kakeya, o de Besicovitch, formado por cilindros (rectángulos o prismas) secantes en múltiples direcciones del espacio.



Malevich
Suprematismo



Frechilla del Rey
Mirando a lo alto



Estalactitas
El Soplao (Santander)

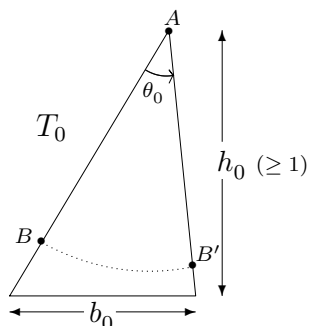
¿Qué aspecto tendrá el conjunto plano de área mínima dentro del cual sea posible mover un segmento orientado (aguja) hasta invertir su posición?

Se trata de una pregunta formulada por Soichi Kakeya en 1917 que se ha convertido en un tema central del Análisis Armónico contemporáneo. Tanto por sus conexiones directas con la transformada de Fourier n -dimensional (teoremas de restricción, sumabilidad esférica de series e integrales de Fourier, teorema de diferenciación de Lebesgue), como por dar lugar a una serie de preguntas inquietantes en torno a dos paradigmas señeros del Análisis: la medida de Lebesgue y la teoría de integrales singulares.

Besicovitch, quien es uno de los creadores de la teoría geométrica de la medida, escribió un artículo en el *American Mathematical Monthly* (1963, 697–706), dando noticia de un trabajo suyo publicado en la Rusia de 1917 en el que se hacía la misma pregunta de Kakeya aportando una respuesta quizás sorprendente: Dado un número positivo ε , sin que importe lo pequeño que este sea, Besicovitch construyó un conjunto de área menor que ε donde es posible invertir continuamente la posición de la aguja.

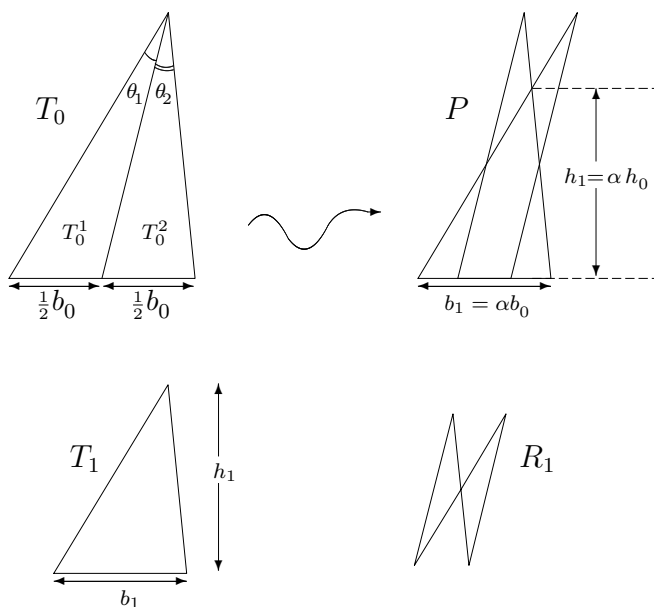
1. La construcción de Besicovitch

Consideremos un triángulo T_0 , de altura $h_0 (\geq 1)$ y base b_0 , en el que podemos girar un segmento de longitud unidad desde la posición AB hasta la $A'B'$, barriendo un ángulo θ_0 , como se indica en la figura.



Ahora bien, el mismo efecto puede conseguirse en el conjunto P , obtenido dividiendo en dos partes el triángulo T_0 por la mediana de su base y trasladando después los triángulos resultantes haciendo que se solapen un poco.

La magnitud del solapamiento la podemos controlar por medio del parámetro α , $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, como se muestra en la siguiente figura:



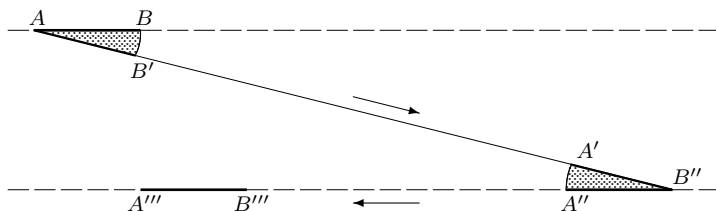
El conjunto P obtenido (árbol pequeño o pimpollo) consta de un tronco, que es un triángulo T_1 semejante a T_0 con razón α , y unas ramas R_1 . Un sencillo cálculo nos da la relación

$$\text{área}(P) = \text{área}(T_1) + \text{área}(R_1) = \{\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2\} \text{área}(T_0)$$

cantidad que podemos hacer estrictamente menor que $\text{área}(T_0)$ sin más que escoger el número α convenientemente ($\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$).

Si designamos con θ_1, θ_2 a los ángulos opuestos a la base $b_0/2$ de los triángulos obtenidos en la subdivisión de T_0 , es claro que $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$ y que

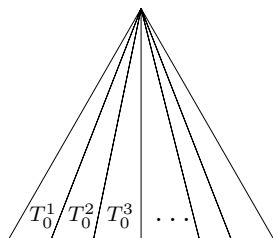
la aguja puede ser girada un ángulo θ_1 en T_0^1 (respectivamente θ_2 en T_0^2). Observemos también que T_0^1 y T_0^2 tienen dos lados paralelos y que siempre podemos trasladar la aguja delgada (un segmento) a una posición paralela en cuanto dispongamos de una porción de área para gastar, por pequeña que esta sea, aunque quizás tengamos que irnos muy lejos para hacerlo, como se indica en la siguiente figura:



La combinación de las dos estrategias anteriores permite usar el conjunto P para girar la aguja un ángulo total de θ_0 dentro de un área estrictamente menor que la del triángulo de partida T_0 . La idea de Besicovitch consistió en repetir esta construcción muchas veces.

Dado un entero positivo n , dividimos la base de un triángulo equilátero T_0 de altura h_0 en 2^n segmentos de idéntica longitud. A partir de ellos obtenemos la descomposición en triángulos

$$T_0 = T_0^1 \cup T_0^2 \cup \dots \cup T_0^{2^n}$$



Con cada pareja T_0^{2k-1}, T_0^{2k} , $k = 1, \dots, 2^{n-1}$ construimos el pimpollo

$$P_1^k = T_1^k \cup R_1^k$$

de la manera antes descrita, usando un parámetro α_1 , $\frac{1}{2} \leq \alpha_1 < 1$.

Observemos que los distintos triángulos T_1^k , $k = 1, \dots, 2^{n-1}$, tienen, cada dos consecutivos, un lado paralelo. Por tanto, pueden ser trasladados hasta posiciones adyacentes para formar un nuevo triángulo T_1 que es semejante a T_0 con razón α_1 . Trasladamos ahora también las ramas R_1^k a las posiciones correspondientes \tilde{R}_1^k y obtenemos el primer árbol $A_1 = T_1 \cup \tilde{R}_1^1 \cup \dots \cup \tilde{R}_1^{2^{n-1}}$:

$$\text{área}(A_1) \leq [\alpha_1^2 + 2(1 - \alpha_1)^2] \text{área}(T_0).$$

Como el triángulo T_1 es una unión de 2^{n-1} triángulos de base $\alpha_1 b_0 2^{-n+1}$ y altura $h_1 = \alpha_1 h_0$, podemos repetir el proceso con otro parámetro α_2 ($\frac{1}{2} \leq \alpha_2 < 1$), y hacerlo sucesivamente un total de n veces con parámetros respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, para obtener un árbol $A_n = T_n \cup \{\text{ramas}\}$ de manera que

$$\begin{aligned} \text{área}(A_n) \leq \left\{ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_n^2 + 2[(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1 - \alpha_2)^2 \right. \\ \left. + \cdots + \alpha_1^2 \cdots \alpha_{n-1}^2(1 - \alpha_n)^2] \right\} \text{área}(T_0). \end{aligned}$$

Tomando ahora los valores

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{n+2-k} = \frac{n+1-k}{n+2-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdots \alpha_k &= \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{n+2-j} = \frac{n+1-k}{n+1} \\ \alpha_k(1 - \alpha_{k+1}) &= 1 - \alpha_k = \frac{n+1-k}{n+2-k}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{área}(A_n) \leq \left\{ \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + 2n \left(\frac{1}{n+2} \right)^2 \right\} \text{área}(T_0) \leq \frac{3}{n} \text{área}(T_0).$$

Finalmente observemos que los 2^n triángulos de la subdivisión original de T_0 pueden ser trasladados hasta encajar dentro de A_n y que si hemos partido de una altura $h_0 > 1$, entonces la aguja puede ser girada $\frac{2\pi}{6}$ radianes si añadimos a A_n un conjunto de área tan pequeña como queramos. Para acabar basta con tomar seis conjuntos de Besicovitch rotados cada uno de ellos $\frac{2\pi}{6}$ radianes respecto del inmediato anterior, para poder realizar el giro completo.

Si partimos ahora de un triángulo con altura $h_0 = 2$ entonces cada triángulo contendría a un rectángulo de base 2^{-n-1} y altura 1. Eso nos permite tratar el caso de una *aguja gruesa*.

Proposición 1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto plano P_ε de medida menor que $C|\log \varepsilon|^{-1}$ (donde C es una constante fija e independiente de ε), de manera que cualquier rectángulo del plano de dimensiones $\varepsilon \times 1$ y dirección arbitraria, puede ser trasladado dentro de P_ε .*

La proposición anterior tiene una recíproca en el sentido siguiente:

Proposición 2. *Existe una constante $C > 0$ tal que si un subconjunto del plano contiene a un rectángulo de dimensión $\varepsilon \times 1$ en cada dirección, entonces su área deber ser mayor que $C/|\log \varepsilon|$.*

Demostración. Sea P un subconjunto medible del plano que verifique las hipótesis de la proposición. Para cada j , $0 \leq j \leq \varepsilon^{-1}$, designemos por R_j a un rectángulo de dimensiones $\varepsilon \times 1$ contenido en P cuya dirección, es decir el ángulo que forma su lado mayor con la horizontal, sea $\omega_j = \frac{1}{2} \pi \varepsilon j$.

Obtenemos un total de $[\varepsilon^{-1}] + 1$ rectángulos, con la notación habitual $[t] =$ parte entera de t .

Sea ϕ_j la función indicadora de R_j , es decir $\phi_j(x, y) = 1$ si $(x, y) \in R_j$, mientras que $\phi_j(x, y) = 0$ en caso contrario.

Tenemos que $\varepsilon = \text{área}(R_j) = \iint \phi_j(x, y) dx dy$. Luego

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_j \text{área}(R_j) = \iint \sum_j \phi_j(x, y) dx dy \\ &\leq \left[\text{área} \left(\bigcup_j R_j \right) \right]^2 \left[\iint \left(\sum_j \phi_j(x, y) \right)^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder.

A continuación observemos que

$$\begin{aligned} \iint \left[\sum_j \phi_j(x, y) \right]^2 dx dy &= \sum_{j,k} \iint \phi_j(x, y) \phi_k(x, y) dx dy \\ &= \sum_{j,k} \text{área} (R_j \cap R_k). \end{aligned}$$

Un sencillo cálculo trigonométrico nos permite obtener

$$\text{área} (R_j \cap R_k) \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{|j - k| + 1}$$

y

$$1 \leq \frac{1}{2} \left[\text{área} \left(\bigcup R_j \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\varepsilon \sum_{j,k} \frac{1}{|j - k| + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\text{área} \left(\bigcup R_j \right) \right]^{\frac{1}{2}} |\log \varepsilon|^{\frac{1}{2}}$$

de donde obtenemos

$$\text{área}(P) \geq \text{área} \left(\bigcup R_j \right) \geq \frac{C}{|\log \varepsilon|}$$

uniformemente en $\varepsilon > 0$. ■

Si llevamos hasta el límite la construcción de Besicovitch obtendremos un conjunto de medida cero que, sin embargo, contiene un segmento de longitud unidad en cada dirección del plano. Un tal conjunto, al que podemos llamar *conjunto de Kakeya*, tiene, no obstante, dimensión fractal, o de Minkowski, máxima: $\dim_M(K) = 2$.

Para verlo recordemos que la dimensión fractal del conjunto K es el valor del límite siguiente:

$$\dim(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log(\text{área}(K_\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right]$$

siendo $K_\varepsilon = \{x : \text{dist}(x; K) \leq \varepsilon\}$.

Comoquiera que K_ε contiene a un rectángulo de dimensiones $\varepsilon \times 1$ en cualquier dirección del plano, la Proposición 2 implica que

$$\text{área}(K_\varepsilon) \geq \frac{C}{|\log \varepsilon|}.$$

Por tanto

$$\left| \frac{\log(\text{área}(K_\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right| \ll \frac{\log(\log(\varepsilon))}{|\log \varepsilon|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Proposición 3. *Todo conjunto de Kakeya plano verifica que $\dim_M(K) = 2$.*

2. La función maximal

Estos resultados sobre los conjuntos de Kakeya no pasarían de ser una mera curiosidad de no ser por sus implicaciones en teorías fundamentales del Análisis, tales como son la sumación esférica de las series e integrales de Fourier, los teoremas de restricción de la transformada de Fourier a subvariedades, o la ortogonalidad de operadores cuyos símbolos viven en distintas regiones del espacio de las fases.

Aunque en este artículo no pretendemos profundizar en estas interesantes conexiones, si conviene mencionar, no obstante, un objeto, la función maximal de Kakeya, que está en la base de todos ellos.

Recordemos el teorema de diferenciación de Lebesgue que es la extensión del teorema fundamental del Cálculo al caso de funciones del espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dice así:

$$\lim_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(y) \, d\mu(y) = f(x), \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Es válido para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mu =$ medida de Lebesgue y donde $Q \Rightarrow x$ significa que el límite está considerado sobre todas las sucesiones de cubos Q que contienen al punto x y cuyo diámetro tiende a cero.

¿Qué ocurre si sustituimos la clase de los cubos por la de los rectángulos (cilindros o prismas) de tamaño y dirección arbitrarios?

Pues bien, en ese contexto, resulta que el teorema de Lebesgue es falso incluso para funciones de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y los conjuntos de Kakeya originan los oportunos contraejemplos.

La versión cuantitativa está naturalmente asociada al siguiente objeto, llamado *función maximal de Kakeya*: dado $N \geq 1$ consideremos la clase \mathcal{B}_N^n de cilindros en \mathbb{R}^n (rectángulos en el caso $n = 2$) cuyo radio r y altura h verifican la relación $h = rN$, pero cuya dirección es arbitraria. Dada una función localmente integrable f definamos

$$M_N^n f(x) = \sup_{R \in \mathcal{B}_N^n} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(y)| d\mu(y).$$

La conjetura siguiente es una importante cuestión del Análisis Armónico contemporáneo que contiene una versión cuantitativa de las propiedades (diferenciación de integrales, dimensión fractal) de los conjuntos de Kakeya:

Conjetura. *En \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, existen constantes finitas $C(n)$, $\alpha(n)$ tales que*

$$\|M_N^n f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq C(n) (\log N)^{\alpha(n)} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$.

En la referencia [5] encontramos la demostración de la conjetura en el caso $n = 2$. Los casos $n \geq 3$ están abiertos, aportando las referencias [6], [8] y [9] algunos resultados parciales que han sido mencionados explícitamente entre las razones por las que J. Bourgain and T. Tao fueron galardonados con la *Field Medal*.

Referencias

- [1] KAKEYA, S.: Some problems on maxima and minima regarding ovals. *Tohoku Sci. Reports* **6** (1917), 71–88.
- [2] BESICOVITCH, A. S.: On Kakeya's problem and a similar one. *Math. Z.* **27** (1928), no. 1, 312–320.
- [3] FEFFERMAN, C.: The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math.* (2) **94** (1971), 330–336.

- [4] DAVIES, R.: Some remarks on the Kakeya problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **69** (1971), 417–421.
- [5] CÓRDOBA, A.: *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*. Thesis University of Chicago, 1974. *Amer. J. Math.* **99** (1977), no. 1, 1–22.
- [6] BOURGAIN, J.: Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier Analysis. *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), no. 2, 147–187.
- [7] CÓRDOBA, A.: The fat needle problem. *Bull. London Math. Soc.* **25** (1993), no 1, 81–83.
- [8] WOLFF, T.: An improved bound for Kakeya type maximal functions. *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995), no. 3, 651–674.
- [9] KATZ, N. H. AND TAO, T.: New bounds for Kakeya problems. *J. Anal. Math.* **87** (2002), 231–263.

Antonio Córdoba
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid (Spain)
antonio.cordoba@uam.es